ГЛАВА 7 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим *двухточечные краевые задачи*, часто встречающиеся в приложениях, например, при решении задач вариационного исчисления, оптимального управления, механики жидкости и газа и др. Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad a \le x \le b \tag{7.1}$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} &\varphi_i(y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, L; \\ &\psi_j(y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)) = 0, \quad j = L+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{7.2}$$

где $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$; $\varphi_i(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $i = \overline{1, L}$; $\psi_i(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $j = \overline{L+1, n}$ — функции указанных аргументов, заданные в некоторой области их изменения; L и $(n - L)$ — число условий на левом и правом концах отрезка $[a, b]$ соответственно. Общее количество условий равно порядку дифференциального уравнения.

Требуется найти функцию $y = y(x)$, которая на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет уравнению (7.1), а на концах отрезка — краевым условиям (7.2).

Если уравнения (7.1), (7.2) линейны относительно искомой функции и ее производных, то краевая задача называется *линейной*.

Для простоты ограничимся частным случаем линейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка ($n = 2$), которая наиболее часто ставится в вычислительной практике и записывается в виде

$$y'' + p(x)y' - q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b, (\Omega \equiv [a, b]); \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A; \\ &\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \tag{7.4}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C_2[a, b]$ — заданные функции, а α_0, α_1, β_0, β_1, A, B — заданные числа, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$, $j = 0,1$.

Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (7.3) и краевым условиям (7.4).

Краевые условия при $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $j = 0{,}1$, задают линейную связь между значениями искомого решения и его производной на концах отрезка $[a, b]$.

В простейшем случае, когда $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$, краевые условия задают на концах отрезка $[a, b]$ только значения функции $y(a)$, $y(b)$. Такие *функциональные условия* называют *краевыми условиями первого рода*. В этом случае краевая задача называется *первой краевой задачей*.

В случае, когда $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, т. е. на концах отрезка заданы только значения производных, краевые условия являются *дифференциальными*. Такие краевые условия называют условиями *второго рода*, или *«мягкими»*. Последнее название обусловлено тем, что они определяют на концах отрезка $[a, b]$ всего лишь наклоны интегральных кривых, а не значения функции $y(x)$. В этом случае задача (7.3), (7.4) называется *второй краевой задачей*.

В общем случае, когда α_0 и/или α_1; β_0 и/или β_1 не равны нулю, краевые условия носят *функционально-дифференциальный* характер и называются условиями *третьего рода*. Тогда задача (7.3), (7.4) называется *третьей краевой задачей*.

Например, условия

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

являются условиями первого рода. Геометрически это означает, что при решении первой краевой задачи требуется найти интегральную кривую уравнения (7.3), проходящую через данные точки (a, A), (b, B) (рис. 7.1*а*).

Условия

$$y'(a) = A, \quad y'(b) = B$$

являются условиями второго рода. Геометрически вторая краевая задача сводится к отысканию интегральной кривой уравнения, пересекающей прямые $x = a$, $x = b$ под заданными углами α, β, где $\mathrm{tg}\alpha = A$, $\mathrm{tg}\beta = B$ (рис. 7.1*б*).

Условия

$$y'(a) = A, \quad y(b) = B$$

являются частным случаем краевых условий третьего рода, так как $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$. Геометрически данная краевая задача сводится к отыс-

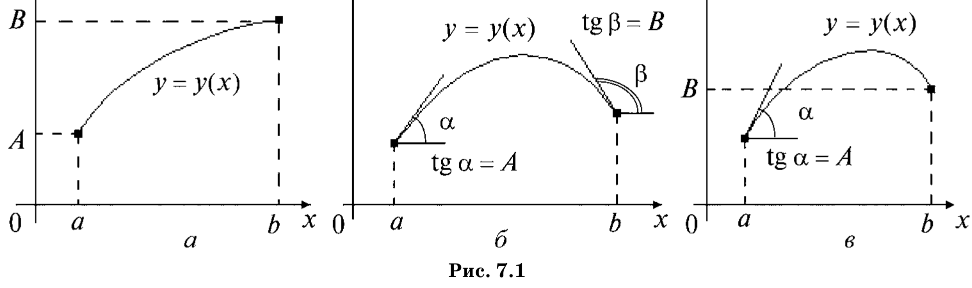

Рис. 7.1

канию интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (b, B) и пересекающей прямую $x = a$ под данным углом α, где $\operatorname{tg}\alpha = A$ (рис. 7.1*в*).

В общем случае краевая задача может:

а) иметь единственное решение;

б) не иметь решений;

в) иметь несколько или бесконечно много решений.

Утверждение 7.1 (о существовании и единственности решения краевой задачи (7.3), (7.4)) [6].

Для того чтобы существовало единственное решение краевой задачи (7.3), (7.4), *необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача*

$$y'' + p(x)y' - q(x)y = 0, \ \ a \le x \le b;$$
$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = 0;$$
$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0$$

имела только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Пример 7.1. Найти аналитическое решение следующих краевых задач:

а) $y'' + y = 1,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ (третья краевая задача);

б) $y'' + y = -x$, $0 \le x \le 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ (первая краевая задача).

□Воспользуемся известной методикой отыскания общих решений дифференциальных уравнений [33]. Подставив в них заданные краевые условия, получим аналитические решения данных краевых задач.

1. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$, одинакового для обеих рассматриваемых задач. Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm i = \alpha \pm \beta i (\alpha = 0$, $\beta = 1)$, то общее решение будет $y_0(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) = C_1\cos x + C_2\sin x$.

2. Частные решения неоднородных уравнений находятся методом подбора.

Подставляя $y_ч(x) = C$ в уравнение $y'' + y = 1$, а $y_ч(x) = Dx$ в уравнение $y'' + y = -x$, получаем $C = 1$, $D = -1$. Поэтому $y_ч(x) = 1$ в случае «а», $y_ч(x) = -x$ в случае «б».

3. Найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

а) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 1$;

б) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - x$.

4. Определим значения произвольных постоянных из краевых условий третьего рода (случай «а») и первого рода (случай «б»):

а) найдем $y'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x$. Тогда

$$y'(0) = C_2 = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 + 1 + C_1 = 2.$$

Отсюда $C_1 = 1$ и $y(x) = 1 + \cos x$ — решение краевой задачи «а»;

б) $y(0) = C_1 = 0$, $y(1) = C_1\cos 1 + C_2\sin 1 - 1 = 0$. Отсюда $C_2 = \dfrac{1}{\sin 1}$ и $y(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - 1$ — решение краевой задачи «б». Таким образом, решение краевой задачи представляет собой такое частное решение, которое удовлетворяет краевым условиям.■

Рассмотренный метод нахождения аналитического решения краевых задач применим для ограниченного класса задач. Поэтому в вычислительной практике используются численные и приближенно-аналитические методы, позволяющие найти приближенное решение краевых задач, точные аналитические решения которых не могут быть найдены.

7.2. МЕТОД СЕТОК

Рассмотрим линейную краевую задачу с краевыми условиями первого рода (первую краевую задачу):

$$\begin{gathered} y'' + p(x)y' - q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b; \\ y(a) = A, \quad y(b) = B, \end{gathered} \tag{7.5}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C_2[a, b]$ — заданные функции; A, B — заданные числа.

Очевидно, любой отрезок $[a, b]$, на котором ищется решение краевой задачи, можно привести к отрезку $[0; 1]$ с помощью линейного преобразования $\tilde{x} = \dfrac{x-a}{b-a}$. Действительно, тогда новая переменная $\tilde{x} \in [0;1]$. В результате без ограничения общности краевая задача (7.5) может быть решена сначала на отрезке $[0; 1]$, а затем это решение с помощью преобразования $x = a + (b-a)\cdot\tilde{x}$ может быть записано на отрезке $[a, b]$. То же относится и к исследованию свойств полученного решения.

Утверждение 7.2 (о единственности решения краевой задачи (7.5)) [6].

Если функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ *принадлежат классу* $C_2[0; 1]$, $q(x) \ge 0$ *на* $[0; 1]$, *то краевая задача* (7.5) *имеет единственное решение* $y(x) \in C_4[0; 1]$.

Для решения задачи (7.5) применим метод сеток, получаемый путем аппроксимации первой и второй производных (см. также п. 6.2.1).

Введем равномерную сетку

$$\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}; \quad h = \frac{b-a}{n},$$

где n — число отрезков разбиения.

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заменяются их проекциями на сетку Ω_n, т. е. $p(x) \to p(x_i) = p_i$, $q(x) \to q(x_i) = q_i$, $f(x) \to f(x_i) = f_i$. Вместо точного решения $y(x)$ отыскивается некоторое приближение $\hat{y}_i = \hat{y}(x_i) \approx y(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Первая и вторая производные аппроксимируются на трехточечном шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) по формулам второго порядка (5.10), (5.14):

$$y'(x_i) \cong \hat{y}_i' = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}}{2h}; \quad y''(x_i) \cong \hat{y}_i'' = \frac{\hat{y}_{i-1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1}}{h^2}.$$

Краевые условия для этой задачи аппроксимируются точно, т. е. $y(a)$ и $y(b)$ заменяются на $\hat{y}_0$ и $\hat{y}_n$. После замены от дифференциальной задачи (7.5) переходим к разностной схеме:

$$\begin{gathered} \frac{\hat{y}_{i+1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}}{2h} - q_i\hat{y}_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \hat{y}_0 = A, \quad \hat{y}_n = B, \end{gathered}$$

представляющей собой систему алгебраических уравнений трехдиагонального вида:

$$
\begin{gathered}
\alpha_i \hat{y}_{i-1} - \beta_i \hat{y}_i + \gamma_i \hat{y}_{i+1} = \delta_i, \;\; i = \overline{1, n-1}; \\
\hat{y}_0 = A, \;\; \hat{y}_n = B,
\end{gathered} \tag{7.6}
$$

где $\alpha_i = \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_i}{2h}$, $\gamma_i = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_i}{2h}$, $\beta_i = \dfrac{2}{h^2} + q_i$, $\delta_i = f_i$. Здесь система (7.6) записана для внутренних узлов сетки Ω_n. Она является трехдиагональной системой линейных алгебраических уравнений и решается методом прогонки (см. п. 1.2.2).

Замечания

1. Изложенный метод сеток допускает обобщение. Например, его можно применять для решения нелинейной краевой задачи:

$$
y'' = F(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{7.7}
$$

где $F(x, y)$ — нелинейная по y функция (в общем случае, который здесь не рассматривается, функция F зависит также и от y').

Рассуждая аналогично рассмотренному выше способу, перейдем к разностной задаче:

$$
\begin{gathered}
\hat{y}_{i-1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1} = h^2 F(x_i, \hat{y}_i), \;\; i = \overline{1, n-1}; \\
\hat{y}_0 = A, \;\; \hat{y}_n = B.
\end{gathered} \tag{7.8}
$$

В силу нелинейности правой части полученная алгебраическая система является нелинейной и для ее решения нельзя использовать метод прогонки в том виде, в каком он изложен для линейной задачи. Поэтому для ее решения используем метод простых итераций (см. п. 3.2.2), с помощью которого при фиксированном k (k — номер итерации) система алгебраических уравнений (7.8) превращается в линейную, так как величины, входящие в правую часть системы, известны из предыдущей итерации. Действительно, для k-й итерации получается система

$$
\begin{gathered}
\hat{y}_{i-1}^{(k)} - 2\hat{y}_i^{(k)} + \hat{y}_{i+1}^{(k)} = h^2 F(x_i, \hat{y}_i^{(k-1)}), \;\; i = \overline{1, n-1}; \\
\hat{y}_0^{(k)} = A, \;\; \hat{y}_n^{(k)} = B,
\end{gathered}
$$

которая решается на каждой итерации методом прогонки.

Можно показать [14], что итерации сходятся при выполнении условия $q = \dfrac{1}{8}(x_n - x_0)^2 M_1 < 1$, $M_1 = \max\limits_{[a,b]} \left| \dfrac{\partial F}{\partial y} \right|$ с линейной скоростью.

2. Краевые условия второго и третьего рода в задаче, аналогичной (7.5), могут быть аппроксимированы несколькими способами.

Первый способ. Использование аппроксимационных формул (5.4) первого порядка

$$
\hat{y}'_0 = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h}, \;\; \hat{y}'_n = \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}}{h}. \tag{7.9}
$$

В силу первого порядка этих аппроксимаций метод сеток в этом случае также будет иметь первый порядок аппроксимации.

Второй способ. Применение формулы Тейлора (В.18) и ее преобразование с использованием дифференциального уравнения. Таким способом может быть достигнут второй порядок аппроксимации.

Третий способ. Применение левосторонней (5.8) и правосторонней (5.9) формул, аппроксимирующих производные со вторым порядком:

$$\hat{y}_0' = \frac{1}{2h}(-3\hat{y}_0 + 4\hat{y}_1 - \hat{y}_2), \quad \hat{y}_n' = \frac{1}{2h}(\hat{y}_{n-2} - 4\hat{y}_{n-1} + 3\hat{y}_n). \qquad (7.10)$$

3. Порядок аппроксимации схемы определяется минимальным порядком аппроксимации дифференциального уравнения и краевых условий.

Алгоритм применения метода сеток

1. Задать сетку Ω_n на отрезке $[a, b]$ или сформировать ее из условий достижения требуемой точности.

2. Используя аппроксимационные формулы (5.10), (5.14) и один из трех способов аппроксимации краевых условий (в случае, если они второго или третьего рода), перейти от исходной дифференциальной задачи к системе алгебраических уравнений (разностной схеме), неизвестными в которой являются величины, «близкие» к решению краевой задачи в узлах сетки.

3. Найти решение разностной задачи путем решения трехдиагональной системы уравнений и таким образом определить приближенное решение краевой задачи.

Пример 7.2. Найти приближенное решение краевой задачи

$$y'' + y = 1, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2};$$
$$y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

при $n = 3$, используя первый способ аппроксимации краевых условий. Записать разностные схемы для второго и третьего способов при произвольном n.

□В поставленной задаче $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $p(x) = 0$, $q(x) = -1$, $f(x) = 1$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $A = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $B = 2$. Для решения задачи воспользуемся методикой.

1. Так как $n = 3$, то сетка имеет вид $\Omega_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, где $x_i = ih$, $i = \overline{0,3}$, $h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $y(0) = y_0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = y_1$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_3$. Будем искать приближенные значения $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$. Проекции функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ на сетку имеют вид $p_i = 0$, $q_i = -1$, $f_i = 1$.

2. Составим разностную схему. Согласно (7.6), для внутренних узлов сетки получаем

$$\frac{\hat{y}_{i+1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1}}{h^2} + \hat{y}_i = 1, \quad i = 1, 2, \text{ или } \hat{y}_{i-1} - (2 - h^2)\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1} = h^2, \quad i = 1, 2.$$

Применим *первый способ* аппроксимации краевых условий. По формуле (5.4) с учетом условия $y'(0) = 0$ на левом конце имеем

$$\hat{y}_0' = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = 0 \text{ или } \hat{y}_1 - \hat{y}_0 = 0.$$

На правом конце $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_3$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_3'$, и по второй из формул (7.9)

$$\hat{y}_3' = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{h}.$$

Тогда краевое условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ аппроксимируется выражением

$$\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{h} = 2 \text{ или } \hat{y}_2 - (1-h)\hat{y}_3 = 2h.$$

В результате получаем разностную схему первого порядка аппроксимации (трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений)

$$\begin{aligned} &\hat{y}_1 - \hat{y}_0 = 0; \\ &\hat{y}_{i-1} - (2-h^2)\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1} = h^2, \ i = 1, 2; \\ &\hat{y}_2 - (1-h)\hat{y}_3 = 2h. \end{aligned}$$

Сравнивая первое уравнение этой системы с рекуррентным соотношением $\hat{y}_i = P_i \cdot \hat{y}_{i+1} + Q_i$ метода прогонки (см. п. 1.2.2), характеризующим обратный ход, получаем $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$.

После этого вычисляются все последующие прогоночные коэффициенты по формулам (см. п. 1.2.2):

$$P_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{\alpha_i Q_{i-1} - \delta_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь α_i, β_i, γ_i соответствуют коэффициентам левой части полученной алгебраической системы, а δ_i — правой части.

Далее выполняется обратный ход:

$$\hat{y}_3 = Q_3, \ \hat{y}_2 = P_2\hat{y}_3 + Q_2, \ \hat{y}_1 = P_1\hat{y}_2 + Q_1.$$

Результаты решения краевой задачи приведены в таблице 7.1, в которой последний столбец соответствует точному решению $y(x) = 1 + \cos x$, найденному в примере 7.1.

В силу того, что краевые условия аппроксимированы с первым порядком относительно h, в данном случае получена разностная схема первого порядка,

Таблица 7.1

i	α_i	β_i	γ_i	δ_i	P_i	Q_i	$\hat{y}_i$	$y(x)$
0	0	–1,0000	–1	0,00000	1,00000	0	1,8648	2,0000
1	1	1,72584	1	0,27415	1,37771	–0,37770	1,8648	1,8666
2	1	1,72584	1	0,27415	2,87240	–1,87242	1,6277	1,5000
3	1	0,47640	—	1,04200	—	1,21853	1,21853	1,0000

так как порядок аппроксимации схемы определяется минимальным порядком аппроксимации дифференциального уравнения и краевых условий.

Воспользуемся *вторым способом* аппроксимации краевых условий для построения разностной схемы второго порядка аппроксимации. Разложим $y(x)$ в точке $x = x_1$ относительно точки x_0 по формуле Тейлора (В.18):

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + O(h^3).$$

Выразим из этого соотношения $y'(x_0)$ и подставим в него вместо $y''(x_0)$ выражение $y''(x_0) = 1 - y(x_0) = 1 - y_0$, определяемое исходным дифференциальным уравнением:

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}(1 - y_0) + O(h^2).$$

Как показывает это соотношение, дифференциальное условие на левой границе аппроксимируется на двухточечном шаблоне $(x_0,\ x_1)$ со вторым порядком аппроксимации двухточечным алгебраическим уравнением:

$$\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} - \frac{h}{2}(1 - \hat{y}_0) = 0 \text{ или } \frac{\hat{y}_1}{h} - \frac{1}{2h}(2 - h^2)\hat{y}_0 = \frac{h}{2}.$$

Аналогично получается двухточечное алгебраическое уравнение при $i = n - 1$ и $i = n$. Разложение $y(x)$ в точке $x = x_{n-1}$ относительно точки x_n по формуле Тейлора (В.18) имеет вид

$$y_{n-1} = y_n - h \cdot y'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3).$$

Выражая отсюда $y'(x_n)$ с учетом связи $y''(x_n) = 1 - y(x_n) = 1 - y_n$, следующей из исходного дифференциального уравнения, получаем

$$y'(x_n) = -\frac{y_{n-1}}{h} + \frac{y_n}{h} + \frac{h}{2}y''(x_n) = -\frac{y_{n-1}}{h} + \frac{y_n}{h} + \frac{h}{2}(1 - y_n).$$

Подставим это выражение в граничное условие:

$$y_n + \frac{y_{n-1}}{h} - \frac{y_n}{h} - \frac{h}{2}(1 - y_n) = 2 \quad \text{или} \quad \frac{\hat{y}_{n-1}}{h} + \frac{1}{2h}(h^2 + 2h - 2)\hat{y}_n = 2 + \frac{h}{2}.$$

Таким образом, система линейных алгебраических уравнений в окончательном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2h}(h^2 - 2)\hat{y}_0 + \frac{1}{h}\hat{y}_1 = \frac{h}{2};\\
&\hat{y}_{i-1} - (2 - h^2)\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1} = h^2,\ \ i = \overline{1, n-1};\\
&\frac{\hat{y}_{n-1}}{h} + \frac{1}{2h}(h^2 + 2h - 2)\hat{y}_n = 2 + \frac{h}{2}.
\end{aligned}$$

Эта трехдиагональная система, отличающаяся от полученной первым способом только первым и последним уравнениями, решается численно методом прогонки.

Применим *третий способ* аппроксимации краевых условий для построения разностной схемы второго порядка. Так, для крайней левой точки используется левосторонняя формула (5.8):

$$\hat{y}_0' = \frac{1}{2h}(-3\hat{y}_0 + 4\hat{y}_1 - \hat{y}_2).$$

Тогда получается трехточечное алгебраическое уравнение:

$$\frac{1}{2h}(-3\hat{y}_0 + 4\hat{y}_1 - \hat{y}_2) = 0 \text{ или } 3\hat{y}_0 - 4\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 0.$$

Аппроксимация производной $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ в крайней правой точке по правосторонней формуле $\hat{y}_n' = \frac{1}{2h}(\hat{y}_{n-2} - 4\hat{y}_{n-1} + 3\hat{y}_n)$ приводит к трехточечному алгебраическому уравнению:

$$\hat{y}_n - \frac{1}{2h}(\hat{y}_{n-2} - 4\hat{y}_{n-1} + 3\hat{y}_n) = 2 \quad \text{или} \quad \hat{y}_{n-2} - 4\hat{y}_{n-1} + (3 - 2h)\hat{y}_n = -4h.$$

Тогда в этом случае получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&3\hat{y}_0 - 4\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 0;\\
&\hat{y}_{i-1} - (2 - h^2)\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1} = h^2, \ \ i = \overline{1, n-1};\\
&\hat{y}_{n-2} - 4\hat{y}_{n-1} + (3 - 2h)\hat{y}_n = -4h.
\end{aligned}$$

Здесь $\hat{y}_2$ в первом уравнении и $\hat{y}_{n-2}$ в последнем нарушают ее трехдиагональный характер. В этом случае система приводится к трехдиагональному виду путем исключения $\hat{y}_2$ и $\hat{y}_{n-2}$ из первых двух и последних двух уравнений системы и после этого решается методом прогонки.■

7.3. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ НЕВЯЗКИ

Описываемые здесь методы относятся к приближенно-аналитическим и могут применяться при решении достаточно широкого класса задач. На основе одного из приближенно-аналитических методов (метода Галеркина) строится метод конечных элементов, излагаемый в п. 7.5.

Рассмотрим линейную краевую задачу (7.3), (7.4). Ее решение будем искать в виде

$$\hat{y}_m(x) = \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) + \ldots + a_m \cdot \varphi_m(x), \tag{7.11}$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ — элементы заданной системы функций; a_1, ..., a_m — неопределенные коэффициенты. Заданная система функций называется *базисной*, и ее элементы должны удовлетворять условиям:

а) $\varphi_j(x) \in C_2[a, b]$, $j = \overline{0, m}$;

б) при любом конечном m функции $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$;

в) $\varphi_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям (7.4)

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \cdot \varphi_0(a) + \beta_0 \cdot \varphi_0'(a) = A; \\ &\alpha_1 \cdot \varphi_0(b) + \beta_1 \cdot \varphi_0'(b) = B. \end{aligned} \tag{7.12}$$

г) $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \cdot \varphi_j(a) + \beta_0 \cdot \varphi_j'(a) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \\ &\alpha_1 \cdot \varphi_j(b) + \beta_1 \cdot \varphi_j'(b) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Функция

$$\varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m) = \hat{y}_m''(x) + p(x)\hat{y}_m'(x) - q(x)\hat{y}_m(x) - f(x) \tag{7.14}$$

называется *невязкой*. Она равна разности левой и правой частей уравнения (7.3), образующейся при подстановке $\hat{y}_m(x)$ вместо $y(x)$ в дифференциальное уравнение, и характеризует степень отклонения функции $\hat{y}_m(x)$ от точного решения краевой задачи. Если при некоторых значениях коэффициентов $a_1, \ldots, a_m$ невязка тождественно равна нулю на отрезке $[a, b]$, а именно

$$\varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m) \equiv 0, \quad a \le x \le b, \tag{7.15}$$

то функция $\hat{y}_m(x)$ совпадает с точным решением краевой задачи (7.3), (7.4), так как удовлетворяются и уравнение, и краевые условия.

Однако при решении краевых задач, как правило, не удается получить невязку тождественно равной нулю. Поэтому ставится задача: вычислить коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ таким образом, чтобы невязка в каком-либо смысле стала меньшей. Полученные в результате коэффициенты определяют приближенное решение (7.11).

Выражение для невязки $\varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m)$ с учетом (7.11) удобно записывать в следующей эквивалентной форме:

$$\varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m) = L\hat{y}_m - f(x) = L\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot L\varphi_j(x) - f(x), \tag{7.16}$$

где $L\hat{y}_m \equiv \hat{y}_m''(x) + p(x)\hat{y}_m'(x) - q(x)\hat{y}_m(x)$, L — линейный оператор задачи (7.3), (7.4) (выполняются равенства $L(y + z) = Ly + Lz$, $L(Cy) = C \cdot Ly$ для любых y, z и постоянной C).

Рассмотрим различные методы, минимизирующие невязку.

А. Метод коллокации. На интервале (a, b) задаются m точек $x_1, \ldots, x_m$ (*точек коллокации*) и требуется, чтобы в каждой из них невязка (7.14) обращалась в нуль:

$$\begin{aligned} &\varepsilon(x_1; a_1, \ldots, a_m) = 0; \\ &\qquad\vdots \\ &\varepsilon(x_m; a_1, \ldots, a_m) = 0. \end{aligned} \tag{7.17}$$

С учетом (7.16) эта система принимает вид

$$\begin{gathered} a_1 L\varphi_1(x_1) + \ldots + a_m L\varphi_m(x_1) = f(x_1) - L\varphi_0(x_1); \\ a_1 L\varphi_1(x_2) + \ldots + a_m L\varphi_m(x_2) = f(x_2) - L\varphi_0(x_2); \\ \vdots \\ a_1 L\varphi_1(x_m) + \ldots + a_m L\varphi_m(x_m) = f(x_m) - L\varphi_0(x_m). \end{gathered} \tag{7.18}$$

Если полученная система m линейных уравнений совместна, то из нее определяются коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$, которые затем подставляются в (7.11).

Б. Метод наименьших квадратов (непрерывный вариант). Неизвестные коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ должны обеспечивать минимум интеграла от квадрата невязки:

$$I = \int_a^b \varepsilon^2(x; a_1, \ldots, a_m) dx \to \min_{a_1, \ldots, a_m}.$$

Для решения задачи применяются необходимые условия безусловного экстремума [31]:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 2 \cdot \int_a^b \varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m) \frac{\partial \varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_j} dx = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7.19}$$

Подставляя (7.16) в (7.19), получаем систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов $a_1, \ldots, a_m$:

$$\begin{gathered} a_1(L\varphi_1, L\varphi_1) + \ldots + a_m(L\varphi_m, L\varphi_1) = (f - L\varphi_0, L\varphi_1); \\ a_1(L\varphi_1, L\varphi_2) + \ldots + a_m(L\varphi_m, L\varphi_2) = (f - L\varphi_0, L\varphi_2); \\ \vdots \\ a_1(L\varphi_1, L\varphi_m) + \ldots + a_m(L\varphi_m, L\varphi_m) = (f - L\varphi_0, L\varphi_m), \end{gathered} \tag{7.20}$$

где $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$ — скалярное произведение. В системе (7.20) все скалярные произведения предварительно вычисляются.

В. Метод наименьших квадратов (дискретный вариант). Неизвестные коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ должны обеспечивать минимум суммы квадратов значений невязки в заданном наборе точек $x_1, \ldots, x_n$; $n \ge m$; т. е. $x_i \in (a, b)$, $i = \overline{1, n}$:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2(x_i; a_1, \ldots, a_m) \to \min_{a_1, \ldots, a_m}.$$

Для решения задачи применяются необходимые условия безусловного экстремума [31]:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i; a_1, \ldots, a_m) \frac{\partial \varepsilon(x_i; a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7.21}$$

Отсюда следует система m линейных уравнений для нахождения коэффициентов $a_1, \ldots, a_m$, которая по форме записи совпадает с (7.20), но скалярное произведение определяется по формуле

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(x_i).$$

Замечание. При $n = m$ результаты, полученные точечным методом наименьших квадратов и методом коллокации, совпадают. В этом случае точки $x_1, \ldots, x_n$ являются точками коллокации.

Г. Метод моментов (взвешенных невязок). Неизвестные коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ находятся из условия равенства нулю m *моментов* невязки:

$$I = \int_a^b \varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m) \cdot \psi_j(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{7.22}$$

где $\psi_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ — функции, удовлетворяющие условиям:

а) $\psi_j(x) \in C[a, b]$, $j = \overline{1, m}$;

б) функции $\psi_j(x)$ являются элементами системы степеней x или системы тригонометрических функций.

Функции $\psi_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, называются *весовыми*, а условие (7.22) является условием ортогональности невязки к весовым функциям.

Д. Метод Галеркина. Он является частным случаем метода моментов, когда в качестве весовых функций используются базисные. Коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ находятся из условия ортогональности функций базисной системы $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ к невязке:

$$\int_a^b \varepsilon(x; a_1, \ldots, a_m) \varphi_j(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7.23}$$

Отсюда следует система m линейных уравнений для нахождения коэффициентов:

$$\begin{gathered} a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + a_m(L\varphi_m, \varphi_1) = (f - L\varphi_0, \varphi_1); \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + \ldots + a_m(L\varphi_m, \varphi_2) = (f - L\varphi_0, \varphi_2); \\ \vdots \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_m) + \ldots + a_m(L\varphi_m, \varphi_m) = (f - L\varphi_0, \varphi_m), \end{gathered} \tag{7.24}$$

где $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$ — скалярное произведение. В системе (7.24) все скалярные произведения предварительно вычисляются.

Известно, что при достаточно большом m условие (7.23) обеспечивает малость невязки в среднем [10].

Алгоритм применения методов минимизации невязки

1. В выражении (7.11) выбрать систему базисных функций, задать число m в зависимости от требуемой точности.

2. Найти коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ путем решения одной из систем алгебраических уравнений (7.18), (7.20), (7.24) в зависимости от выбранного метода.

3. Выписать приближенное решение краевой задачи по формуле (7.11).

Пример 7.3. Найти приближенное решение краевой задачи

$$y'' + y = -x, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

методом коллокации, интегральным методом наименьших квадратов, методом Галеркина.

□В поставленной задаче $a = 0$, $b = 1$, $p(x) = 0$, $q(x) = -1$, $f(x) = -x$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $A = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $B = 0$, $Ly = y'' + y$. Точное решение найдено в примере 7.1.

Воспользуемся сначала *методом коллокации*.

1. Зададим $m = 2$ и будем искать решение в виде

$$\hat{y}_2(x) = \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) + a_2 \cdot \varphi_2(x),$$

где $\varphi_0(x) \equiv 0$ (эта функция удовлетворяет каждому из краевых условий, т. е. $\varphi_0(0) = 0$, $\varphi_0(1) = 0$), функции $\varphi_1(x) = x(1 - x)$, $\varphi_2(x) = x^2(1 - x)$. Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ линейно независимые, дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют условию (7.13). Действительно,

$$1 \cdot \varphi_j(0) + 0 \cdot \varphi_j'(0) = 0, \quad j = 1,2;$$
$$1 \cdot \varphi_j(1) + 0 \cdot \varphi_j'(1) = 0, \quad j = 1,2.$$

Таким образом, решение краевой задачи ищется в форме

$$\hat{y}_2(x) = a_1 \cdot x(1-x) + a_2 \cdot x^2(1-x).$$

2. Так как $m = 2$ и $\varphi_0(x) \equiv 0$, то система (7.18) имеет вид

$$a_1 L\varphi_1(x_1) + a_2 L\varphi_2(x_1) = f(x_1);$$
$$a_1 L\varphi_1(x_2) + a_2 L\varphi_2(x_2) = f(x_2).$$

Выберем узлы коллокации: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Тогда

$$L\varphi_1(x) = \varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -2 + x(1-x) = -2 + x - x_2;$$
$$L\varphi_1(x_1) = L\varphi_1\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{29}{16}; \quad L\varphi_1(x_2) = L\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4};$$
$$L\varphi_2(x) = \varphi_2''(x) + \varphi_2(x) = 2 - 6x + x^2 - x^3;$$
$$L\varphi_2(x_1) = L\varphi_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{35}{64}; \quad L\varphi_2(x_2) = L\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8}.$$

Таким образом, имеем линейную систему относительно a_1 и a_2:

$$\frac{29}{16}a_1 - \frac{35}{64}a_2 = \frac{1}{4};$$
$$\frac{7}{4}a_1 + \frac{7}{8}a_2 = \frac{1}{2},$$

решение которой дает

$$a_1 = \frac{6}{31}, \quad a_2 = \frac{40}{217}.$$

3. Приближенное решение задачи:

$$\hat{y}_2(x) = \frac{x(1-x)}{217}(42+40x).$$

Решим теперь задачу *методом наименьших квадратов* (см. непрерывный вариант).

1. Решение краевой задачи ищется в форме ($m = 2$):

$$\hat{y}_2(x) = a_1 \cdot x(1-x) + a_2 \cdot x^2(1-x).$$

2. Так как $f(x) = -x$, $\varphi_0(x) \equiv 0$, то система (7.20) имеет вид

$$a_1(L\varphi_1, L\varphi_1) + a_2(L\varphi_2, L\varphi_1) = (-x, L\varphi_1);$$
$$a_1(L\varphi_1, L\varphi_2) + a_2(L\varphi_2, L\varphi_2) = (-x, L\varphi_2),$$

где

$$(L\varphi_1, L\varphi_1) = \int_0^1 (-2 + x - x^2)^2\,dx = \frac{101}{30}; \quad (L\varphi_2, L\varphi_2) = \int_0^1 (2 - 6x + x^2 - x^3)^2\,dx = \frac{131}{35};$$
$$(L\varphi_1, L\varphi_2) = \int_0^1 (-2 + x - x^2)(2 - 6x + x^2 - x^3)\,dx = \frac{101}{60};$$
$$(-x, L\varphi_1) = \int_0^1 (-x)(-2 + x - x^2)\,dx = \frac{11}{12}; \quad (-x, L\varphi_2) = \int_0^1 (-x)(2 - 6x + x^2 - x^3)\,dx = \frac{19}{20}.$$

Итак, имеем линейную систему относительно a_1 и a_2:

$$\frac{101}{30}a_1 + \frac{101}{60}a_2 = \frac{11}{12};$$
$$\frac{101}{60}a_1 + \frac{131}{35}a_2 = \frac{19}{20},$$

решение которой дает $a_1 = 0{,}1875419$, $a_2 = 0{,}1694707$.

3. Приближенное решение задачи:

$$\hat{y}_2(x) = 0{,}1875419 \cdot x(1-x) + 0{,}1694707 \cdot x^2(1-x).$$

Решим задачу *методом Галеркина*.

1. Пусть сначала $m = 1$. Решение ищется в форме $\hat{y}_1(x) = a_1 \cdot x(1-x)$.

2. Тогда система (7.24) преобразуется к виду

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_1) = (-x, \varphi_1) \quad \text{или} \quad a_1(\varphi_1'' + \varphi_1) = (-x, \varphi_1).$$

Так как $\varphi_1(x) = x(1-x), L\varphi_1(x) = \varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -2 + x(1-x),$ получаем

$$a_1 \int_0^1 (-2 + x(1-x)) \cdot x(1-x)dx = -\int_0^1 x^2(1-x)dx.$$

После вычисления интегралов имеем уравнение $-\frac{3}{10}a_1 = -\frac{1}{12}$, откуда $a_1 = \frac{5}{18}$.

3. Приближенное решение краевой задачи:

$$\hat{y}_1(x) = \frac{5}{18} x \cdot (1-x).$$

Пусть теперь $m = 2$.

1. Решение краевой задачи ищется в форме

$$\hat{y}_2(x) = a_1 \cdot x(1-x) + a_2 \cdot x^2(1-x).$$

2. Тогда система (7.24) имеет вид

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) = (f, \varphi_1);$$
$$a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_2) = (f, \varphi_2).$$

Так как $\varphi_1(x) = x(1-x)$, $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$, $L\varphi_1(x) = \varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -2 + x(1-x)$, $L\varphi_2(x) = \varphi_2''(x) + \varphi_2(x) = 2 - 6x + x^2 - x^3$, получаем

$$a_1 \int_0^1 [-2 + x(1-x)] \cdot x(1-x)dx + a_2 \int_0^1 [2 - 6x + x^2(1-x)] \cdot x(1-x)dx = -\int_0^1 x^2(1-x)dx;$$

$$a_1 \int_0^1 [-2 + x(1-x)] \cdot x^2(1-x)dx + a_2 \int_0^1 [2 - 6x + x^2(1-x)] \cdot x^2(1-x)dx = -\int_0^1 x^3(1-x)dx.$$

Вычисляя интегралы, находим

$$\frac{3}{10}a_1 + \frac{3}{20}a_2 = \frac{1}{12};$$
$$\frac{3}{20}a_1 + \frac{13}{105}a_2 = \frac{1}{20}.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}.$$

3. Приближенное решение краевой задачи:

$$\hat{y}_2(x) = x(1-x) \cdot \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right).$$

Таблица 7.2

x	$y_{\text{коллок}}$	$y_{\text{мет. наим. кв}}$	$y_{\text{Галеркина}}$	**Точное решение**
0,25	0,045	0,04311	0,0440	0,044014
0,50	0,071	0,06807	0,0698	0,069747
0,75	0,062	0,05899	0,0600	0,060050

Сопоставим полученные решения с точным (табл. 7.2).

Очевидно, метод Галеркина дал более точный результат. ■

Пример 7.4. Найти приближенное решение краевой задачи [42]

$$y'' + 2xy' - 2y = 2x^2, \;\; 0 \le x \le 1;$$
$$y'(0) = -2, \;\; y(1) + y'(1) = 0$$

методом Галеркина.

□В поставленной задаче $a = 0$, $b = 1$, $p(x) = 2x$, $q(x) = 2$, $f(x) = 2x^2$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $A = -2$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $B = 0$, $Ly = y'' + 2xy' - 2y$.

1. Зададим $m = 2$ и подберем функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, используя систему $1, x, x^2, \ldots$ Функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять условиям (7.12):

$$\varphi_0'(0) = -2, \;\; \varphi_0(1) + \varphi_0'(1) = 0.$$

Пусть $\varphi_0(x) = b + cx$, где b, c — неопределенные коэффициенты. Тогда

$$\varphi_0'(0) = c = -2, \;\; \varphi_0(1) + \varphi_0'(1) = b + c + c = b + 2c = 0.$$

Отсюда $b = 4$ и $\varphi_0(x) = 4 - 2x$.

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ должны удовлетворять условиям (7.13):

$$\varphi_j'(0) = 0, \;\; \varphi_j(1) + \varphi_j'(1) = 0, \;\; j = 1, 2.$$

Первое условие выполняется для функций вида $\varphi_j(x) = x^{j+1} + b_j$. Значения b_j находятся из второго условия $1 + b_j + j + 1 = 0$, откуда $b_j = -j - 2$. Тогда получаем $\varphi_1(x) = x^2 - 3$, $\varphi_2(x) = x^3 - 4$.

Таким образом, решение краевой задачи ищется в форме

$$\hat{y}_2(x) = 4 - 2x + a_1 \cdot (x^2 - 3) + a_2 \cdot (x^3 - 4).$$

2. Тогда система (7.24) имеет вид

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) = (f - L\varphi_0, \varphi_1),$$
$$a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_2) = (f - L\varphi_0, \varphi_2),$$

где

$$L\varphi_0(x) = \varphi_0''(x) + 2x\varphi_0'(x) - 2\varphi_0(x) = 0 + 2x(-2) - 8 + 4x = -8;$$
$$L\varphi_1(x) = \varphi_1''(x) + 2x\varphi_1'(x) - 2\varphi_1(x) = 2 + 2x2x - 2x^2 + 6 = 2x^2 + 8;$$
$$L\varphi_2(x) = \varphi_2''(x) + 2x\varphi_2'(x) - 2\varphi_2(x) = 6x + 2x3x^2 - 2x^3 + 8 = 4x^3 + 6x + 8.$$

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^2 - 3)dx = -22{,}93333;$$

$$(L\varphi_2, \varphi_1) = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^2 - 3)dx = -31{,}16667;$$

$$(L\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4)dx = -32{,}33333;$$

$$(L\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^3 - 4)dx = -44{,}22857;$$

$$(f - L\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^2 - 3)dx = -22{,}93333;$$

$$(f - L\varphi_0, \varphi_2) = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4)dx = -32{,}33333.$$

Окончательно получаем

$$22{,}93333 \cdot a_1 + 31{,}16667 \cdot a_2 = 22{,}93333;$$
$$32{,}33333 \cdot a_1 + 44{,}22857 \cdot a_2 = 32{,}33333.$$

Отсюда $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.
3. Приближенное решение краевой задачи $\hat{y}_2(x) = x^2 - 2x + 1$. ■

7.4. МЕТОДЫ СВЕДЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ЗАДАЧЕ КОШИ

7.4.1. МЕТОД СТРЕЛЬБЫ

Суть этого метода заключается в сведении решения краевой задачи к многократному решению задачи Коши. Принцип построения метода стрельбы рассмотрим на примере нелинейной краевой задачи:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b; \tag{7.25}$$
$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{7.26}$$

где $f(x, y, y')$ — нелинейная функция, обусловливающая нелинейность дифференциального уравнения (7.25).

При введении новой переменой $z = y'$ уравнение (7.25) записывается в нормальной форме Коши, а краевые условия видоизменяются:

$$\begin{aligned} &y' = z, \quad y(a) = A; \\ &z' = f(x, y, z), \quad z(a) = \eta, \end{aligned} \tag{7.27}$$

где $\eta = y'(a) = \mathrm{tg}\alpha$ — параметр, равный тангенсу угла наклона интегральной кривой в точке $x = a$. Угол α (параметр η) в процессе многократного решения краевой задачи должен принять такое значение, чтобы интегральная кривая «попала в цель», т. е. в точку (b, B) (рис. 7.2*а*). В общем случае полученное